Adı Soyadı: 28.04.2024
Numarası:

2023-2024 SOYUT MATEMATİK II DERSİ ARA SINAV SORULARI

1) (15p)a) Kafes nedir, tanımlayınız. $(A, \leq)$ bir kafes olsun. $x \leq y$ ise her $z \in A$ için $x \wedge z \leq y \wedge z$ olduğunu gösteriniz.

   (15p)b) p, q, r doğal sayıları verilsin. $q < p$ ise $pr + p^2 > p(r + q)$ olduğunu **tümevarım** yöntemi ile gösteriniz.

2) (10p)a) İki negatif tam sayının toplamlarının da negatif olduğunu gösteriniz.

   (15p)b) Tam sayılarda toplama işleminin iyi tanımlı olduğunu gösteriniz.

   (15p)c) k, m, x, c, d tam sayıları için $kc + md = 1$ olsun. $k|x$ ve $m|x$ ise $mk|x$ olduğunu gösteriniz.

3) (20p)a) Rasyonel sayı ve Rasyonel sayılar kümesini üzerindeki bağıntıyı da yazarak tanımlayınız ve Rasyonel sayılarda çarpma işleminin toplama işlemi üzerine sağ dağılma özelliğinin sağlandığını gösteriniz.

   (10p)b) $x = [(5,3)]$ sayısı veriliyor. Buna göre $x^4 + 2x + 3$ sayısını hesaplayınız.

Başarılar
Dr. Çağla Çelemoğlu

Cevap Anahtarı

1) a) Kafes : $(A, \leq)$ kısmen sıralı bir küme olsun. $\forall x, y \in A$ için $\sup\{x, y\}$ ve $\inf\{x, y\}$ mevcutsa, A'ya bir kafes denir. $x \leq y$ olsun. $(A, \leq)$ kafes old. $x \wedge z \leq x$ dir. $x \leq y \underset{(A,\leq) \text{ KSK}}{\Rightarrow} x \wedge z \leq y$
$x \wedge z \leq z$ ve
$x \wedge z \leq z$ ve $x \wedge z \leq y \Rightarrow x \wedge z \leq y \wedge z$ bulunur
(A,≤) kafes old.
(4. öz)

1 b) $A=\{r\in\mathbb{N} \mid q<p \Rightarrow pr+p^2 > p(r+q)\} \subseteq \mathbb{N}$

alalım.

ilk olarak $0\in A$ old. gösterelim.

$(p,q,r\in\mathbb{N})$

$$q<p \Rightarrow pq<p^2$$
$$\Rightarrow p^2>pq$$
$$\Rightarrow p^2+p.0 > p(0+q) \text{ olup } 0\in A \text{ alır.}$$

$r\in A$ iken $r^+\in A$ old göstermeliyiz.

$r\in A \Rightarrow q<p \Rightarrow pr+p^2 > p(r+q)$ yazılır

$r^+\in A$ olup olmadığına bakalım

$q<p \Rightarrow pr^+ + p^2 \overset{T2}{=} (pr+p)+p^2$ olup $q<p \Rightarrow pq<p^2$

yani $p^2>pq$ olduğundan

$$pr^+ + p^2 > pr+p+pq$$
$$\Rightarrow pr^+ + p^2 > p(r+1+q)$$
$$\Rightarrow pr^+ + p^2 > p(r^+ + q) \text{ olup } r^+\in A \text{ yazılır}$$

Tümevarımla $A=\mathbb{N}$ bulunur

2 a) $[a,b]$ ve $[c,d]$ iki negatif tam sayı olsun.

$[a,b]<0 \Rightarrow a<b$

$[c,d]<0 \Rightarrow c<d$ yazılır Buradan taraf tarafa

toplarsak $a+c<b+d$ yani $[a+c, b+d]<0$

Yani $[a,b]\oplus[c,d]<0$ bulunur

b) $\oplus\ \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$([a,b],[c,d]) \rightarrow \oplus([a,b],[c,d]) = [a+c, b+d]$

$([a,b],[c,d]), ([a',b'],[c',d']) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ alalım

$\forall([a,b],[c,d]), ([a',b'],[c',d'])$ olsun. O halde

$([a,b],[c,d]) = ([a',b'],[c',d'])$

$[a,b]=[a',b'] \Leftrightarrow a+b'=b+a'$

$[c,d]=[c',d'] \Leftrightarrow c+d'=d+c'$ bulunur

(Taraf tarafa toplanırsa)

$a+b'+c+d' = b+a'+d+c'$

$\mathbb{N}$ de "+" değişme ve birleşme öz.

$\Rightarrow a+c+b'+d' = b+d+a'+c'$

$\Rightarrow (a+c, b+d) \,\tau\, (a'+c', b'+d')$

$\Rightarrow [a+c, b+d] = [a'+c', b'+d']$

$\Rightarrow [a,b] \oplus [c,d] = [a',b'] \oplus [c',d']$

2 c) $k|x \Rightarrow \boxed{x=kt}$ o.ş $t\in\mathbb{Z}$

$m|x \Rightarrow \boxed{x=ml}$ o.ş $l\in\mathbb{Z}$ vardır.

(her iki tarafı x ile çarparsak)

$kc+md=1 \Rightarrow kcx+mdx=x$

$\Rightarrow kc(ml)+md(kt)=x$

$\Rightarrow kmcl+kmdt=x$

$\Rightarrow km(\underbrace{cl+dt}_{\in\mathbb{Z}})=x$

$\Rightarrow km|x \Rightarrow mk|x$ yazılır

3 a) $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ üzerinde tanımlı

$(m,n)\,R\,(p,q) \Leftrightarrow mq=np$ bağıntısı bir denklik bağıntısı olup her elemanın denklik sınıfı tanımlıdır. $(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ için

$\overline{(m,n)} = \{(x,y) \mid (x,y)R(m,n)\} = \{(x,y) \mid xn=ym\}$

kümesine bir rasyonel sayı ve

$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/R = \{\overline{(m,n)} \mid (m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*\}$ bölüm kümesine

Rasyonel sayılar kümesi denir. Şimdi de

$([(m,n)]\oplus[(p,q)])\odot[(r,s)] = ([(m,n)]\odot[(r,s)]) \oplus ([(p,q)]\odot[(r,s)])$ olduğunu gösterelim.

$$([(m,n)] \oplus [(p,q)]) \odot [(r,s)] = [(mq+np, nq)] \odot [(r,s)]$$
$$= [((mq+np)r, (nq)s)]$$
$$= [(mqr+nps, (nq)s)]$$

Ayrıca

$$([(m,n)] \odot [(r,s)]) \oplus ([(p,q)] \odot [(r,s)]) = [(mr,ns)] \oplus [(pr,qs)]$$
$$= [(mrqs+nspr, nsqs)]$$
$$= [(s(mrq+nps, (nsq)s$$

s ile sadeleşirse

$$= [(mrq+nps, (nq)s)]$$

Buradan istenen eşitlik elde edilir.

3 b) $x = [(5,3)] \Rightarrow x^4 = [(5,3)] \odot [(5,3)] \odot [(5,3)] \odot [(5,3)]$
$$= [(25,9)] \odot [(25,9)]$$
$$= [(625,81)]$$

$2x = x+x = [(5,3)] \oplus [(5,3)] = [(15+15, 9)]$
$$= [(30,9)] = [(10,3)]$$

$$x^4+2x+3 = [(625,81)] + [(10,3)] + [(3,1)]$$
$$= [(625,81)] + [(10+9, 3)]$$
$$= [(625,81)] + [(19,3)]$$
$$= [(625.3+81.19, 81.3)]$$
$$= [(1875+1539, 243)]$$
$$= [(3414, 243)] = [(1138, 81)]$$

Scanned with CamScanner